



WELCOME



**WELCOME TO
SIRAJGANJ POLYTECHNIC INSTITUTE**

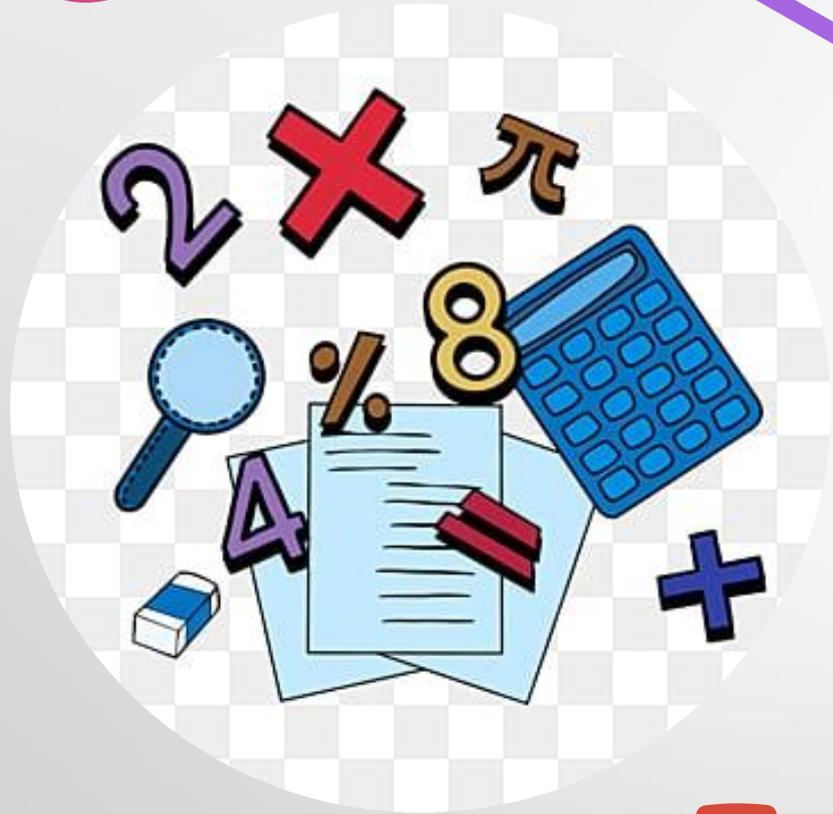


MD. ZAKARIA HOSSAIN
JUNIOR INSTRUCTOR IN MATHEMATICS(PART TIME)
SIRAJGANJ POLYTECHNIC INSTITUTE

ছাত্র-ছাত্রী পরিচিতি

ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং
পর্ব: প্রথম
সকল টেকনোলজির জন্য
সিরাডগঞ্জ পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১
বিষয় কোডঃ ২৫৯১১



ম্যাথমেটিক্স-১

1

নির্ণায়ক

২

ম্যাট্রিক্স

৩

বহুপদী ও বহুপদী
সমীকরণ

৪

জটিল সংখ্যা

৫

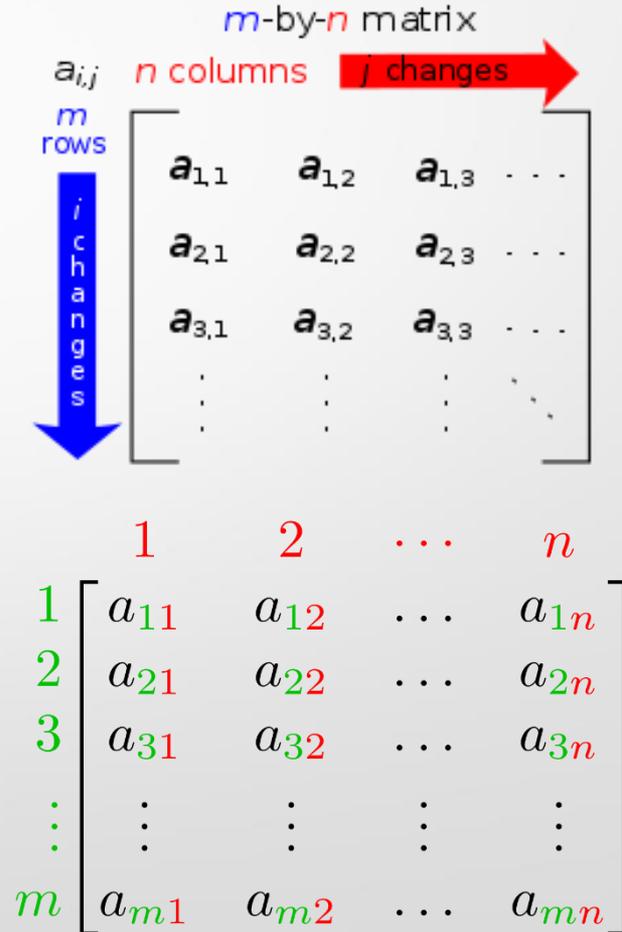
বিন্যাস ও সমাবেশ

নির্ণায়ক

Back

নির্ণায়ক হলো বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকারের রাশি। কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর উপাদানগুলোকে একই রেখে এবং তাদের অবস্থানের পরিবর্তন না করে $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ আকারে লিখলে একে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বা সংক্ষেপে নির্ণায়ক বলে।

অন্যভাবে, কতগুলো রাশি বা পদকে দুটি খাড়া বন্ধনীর মধ্যে নির্দিষ্ট নিয়মে সমান সংখ্যক সারি ও কলামে বর্গাকৃতি উপায়ে সাজানো হলে তাকে নির্ণায়ক বলে।



ম্যাট্রিক্স

সঙ্কহ সংখ্যক রাশিকে বা সংখ্যাকে যদি প্রথম বন্ধনি বা তৃতীয় বন্ধনি বা দুই জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা এর মধ্যবর্তী স্থানে সংখ্যক স সারি ও হ সংখ্যক কলামে সাজিয়ে যে আয়তাকার বিন্যাস পাওয়া যায়, তাকে (সঙ্কহ) ক্রমের ম্যাট্রিক্স বলে।

$$\text{যমেনঃ- } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

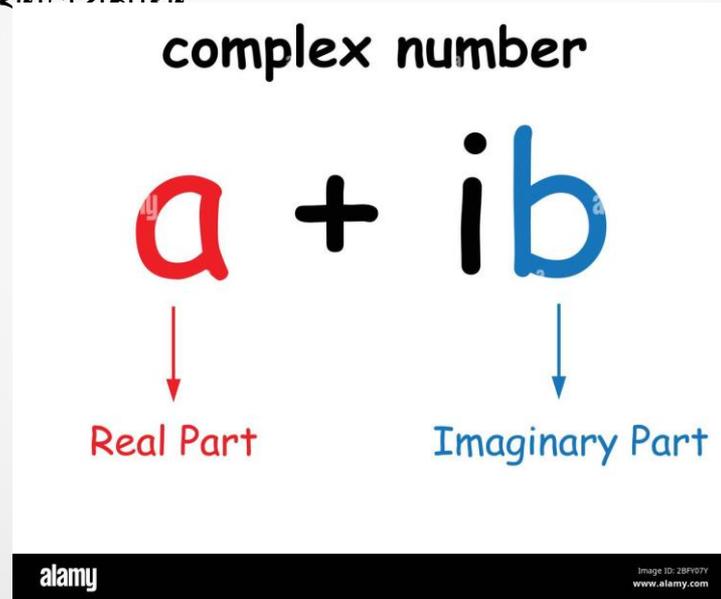
একটি 2×3 ক্রমের
ম্যাট্রিক্স। যখনে 2 টি
সারি ও 3 টি কলাম আছে।



জটিল সংখ্যা

Back

$a+ib$ আকারের সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলে।
যেখানে a হলো বাস্তব ও b হলো কাল্পনিক
অংশ।



বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

বহুপদী একপ্রকারে বীজগণিতীয় রাশি এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকতে পারে। বহুপদীর বিভিন্ন পদগুলো এক বা একাধিক চলককে কেবলমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবককে

বহুপদী সমীকরণের প্রকাশ :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

The diagram illustrates the components of the polynomial equation $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Arrows point from the terms to labels: a_n is labeled 'পদ' (Term), $a_{n-1} x^{n-1}$ is labeled 'সূচক' (Coefficient) and 'চহ্ন' (Power), $a_1 x$ is labeled 'ধ্রুবক' (Constant), and a_0 is labeled 'ধ্রুবক' (Constant).

বিন্যাস ও সমাবেশ

Back

বিন্যাস হলো কতগুলো জিনিস থেকে কয়েকটি বা সবকটি একেবারে নিয়ে ভিন্ন ভিন্নভাবে যতবার সাজানো যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলে।

সমাবেশ হলো কতগুলো জিনিস থেকে কয়েকটি বা সবকটি একেবারে নিয়ে সম্ভব যত প্রকারে বেছে নেয়া বা দল গঠন করা যায় (দলের মধ্যে জিনিসগুলো সাজানোর ক্রম উপেক্ষা করে) এদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে।



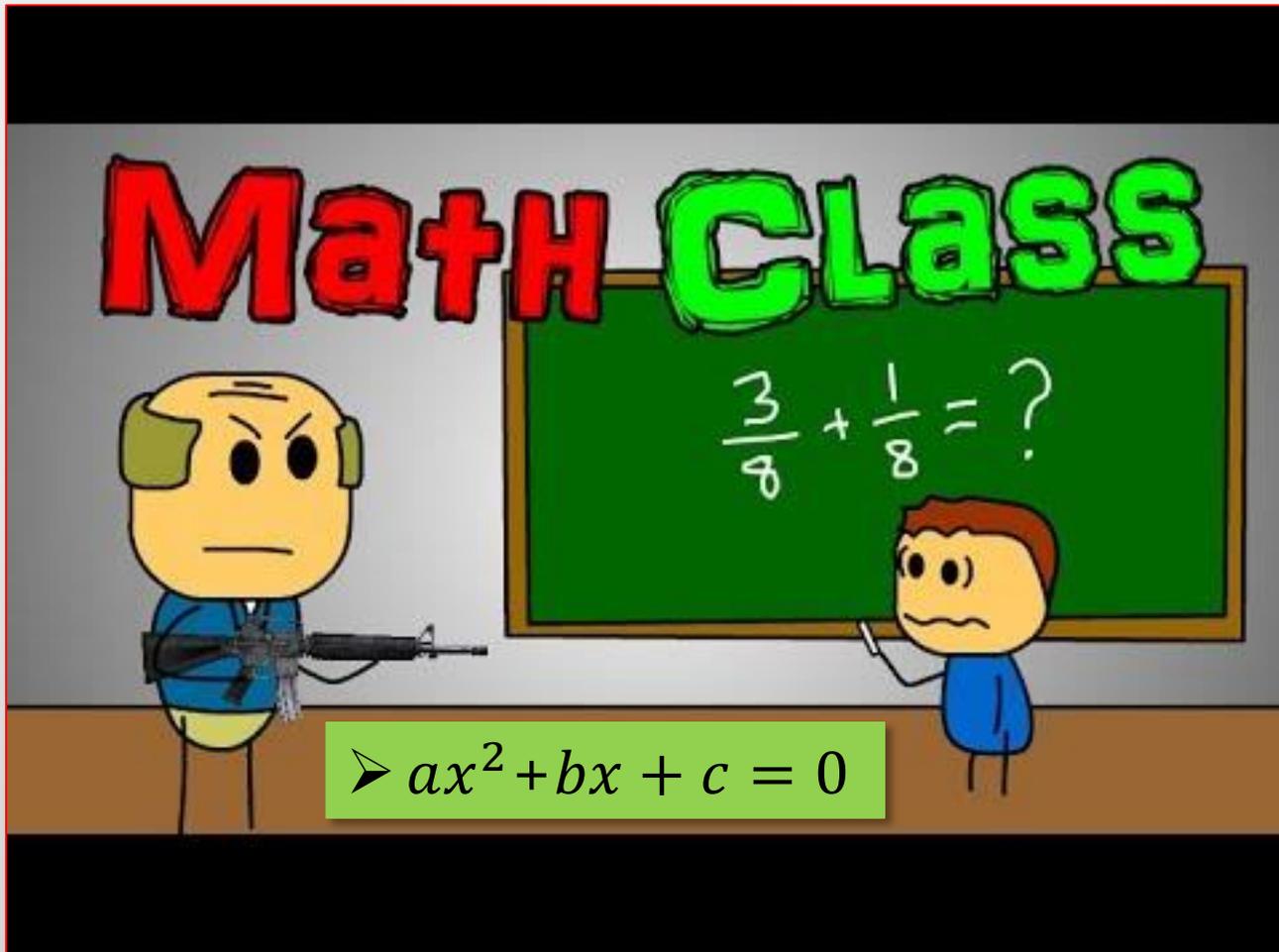
বহুপদী
(Polynomials)

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১
বিষয় কোডঃ ২৫৯১১
সময়: ৪৫মি:

পাঠ : বীজগণিত
অধ্যায়-৩
বহুপদী

Motivation



এই পাঠ শেষে . . .

- দ্বিঘাত সমীকরণ কিভাবে চিনব ।
- দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শ আকার যানব ।
- আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান যানব ।
- দ্বিঘাত সমীকরণ মূল বা বীজ নির্ণয় করা যানব ।
- দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করা যানব ।

দ্বিঘাত সমীকরণ

- কোন বহুপদীসমীকরণে x এর সর্বোচ্চঘাত 2 হলেতাকেদ্বিঘাতসমীকরণবলে।
- একচলকবিশিষ্টদ্বিঘাতসমীকরণেরআদর্শআকার (General Form) হল :
 $ax^2 + bx + c = 0$, যেখানে $a \neq 0$
- উদাহরণস্বরূপঃ $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 - 1 = 0$ প্রত্যেকেইদ্বিঘাতসমীকরণ।

দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান
(**General Solution Of Quadratic Equation**
)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{বা, } 4x^2 + 4\frac{b}{a}x + 4\frac{c}{a} = 0$$

$$\text{বা, } (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4\frac{c}{a} = 0$$

$$\text{বা, } \left(2x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}$$

$$\text{বা, } 2x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$$\text{বা, } 2x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

দ্বিঘাত সমীকরণ : $ax^2 + bx + c = 0$

এখানে, নিশ্চায়কবানিরূপক (Discriminant) $D=b^2-4ac$

(i) যদি $D=b^2 - 4ac=0$ হয় তবে মূলদুইটি হবে $-\frac{b}{2a}$ এবং $-\frac{b}{2a}$ । অর্থাৎ মূলদুইটি বাস্তব ও সমান হবে।

(ii) $D=b^2 - 4ac > 0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।

(iii) $D=b^2 - 4ac < 0$ হলে মূলদ্বয় অবাস্তব / জটিল ও অসমান হবে।

(iv) $D= b^2 - 4ac$ পূর্ণবর্গ হলে মূলদ্বয় মূলদ হবে।

(v) $c = 0$ হলে একটি মূল 0 হবে।

(vi) $b = 0$ হলে মূলদুইটি হবে $\sqrt{-c/a}$ এবং $-\sqrt{-c/a}$ অর্থাৎ মূলদুইটির মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

(vii) দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন: $x^2 - (\text{মূলদ্বয়ের যোগফল})x + (\text{মূলদ্বয়ের গুণফল}) = 0$

(viii) মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{a}$, মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a}$

সমস্যা সমাধান

□ $x^2 - 5x + 5 = 0$ কে সমাধান করতে হবে।

সমাধান : প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণ: $x^2 - 5x + 5 = 0$

এখানে, $a = 1, b = -5, c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

প্রয়োজনীয় সমস্যাবলী

সমস্যা-১ : $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$$\alpha + \beta = -\frac{(-6)}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{4}$$

এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার মূলদ্বয় $\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$

$$\text{মূলদ্বয়ের যোগফল} = \alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$

$$\text{মূলদ্বয়ের গুণফল} = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{25}{4}$$

দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন : $x^2 - (\text{মূলদ্বয়ের যোগফল})x + (\text{মূলদ্বয়ের গুণফল}) = 0$

$$x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{25}{4} = 0 \quad \text{বা} \quad 4x^2 - 30x + 25 = 0 \quad (\text{Ans})$$

সমস্যা সমাধান

সমস্যা-২: k এর মান কত হলে $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান হবে?

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ : $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + (2k - 6)x + (k - 1) = 0$$

এখানে, নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$$= (2k - 6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k - 1)$$

$$= 4k^2 - 28k + 40$$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক শূন্য হবে।

$$\text{অর্থাৎ } 4k^2 - 28k + 40 = 0$$

$$\text{বা, } k^2 - 7k + 10 = 0$$

$$\text{বা, } k^2 - 5k - 2k + 10 = 0$$

$$\text{বা, } (k - 2)(k - 5) = 0$$

$$\therefore k - 2 = 0 \text{ অথবা } k - 5 = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } k = 2 \text{ অথবা } k = 5 \text{ (Ans)}$$

সমস্যা সমাধান

সমস্যা-৩: k এর মান কত হলে, $(3k + 1)x^2 + (11 + k)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো-

a. সমান b. বাস্তব ও অসমান c. জটিল হবে?

সমাধান :

$$\begin{aligned}\text{এখানে, নিশ্চায়ক, } D &= b^2 - 4ac \\ &= (11 + k)^2 - 4 \cdot (3k + 1) \cdot 9 \\ &= k^2 + 22k + 121 - 108k - 86 \\ &= k^2 - 86k + 85 \\ &= k^2 - k - 85k + 85 \\ &= (k - 1)(k - 85)\end{aligned}$$

a. মূলগুলো সমান হবে যদি $D=0$ হয়

$$\Rightarrow (k - 1)(k - 85) = 0$$

$$\Rightarrow k = 1 \text{ অথবা } 85 \text{ হয়}$$

b. মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে যদি $D > 0$ হয়

$$\Rightarrow (k - 1)(k - 85) > 0$$

$$\Rightarrow k < 1 \text{ অথবা } 85 > 0 \text{ হয়}$$

c. মূলগুলো জটিল হবে যদি $D < 0$ হয় $\Rightarrow (k - 1)(k - 85) < 0$

$$\Rightarrow k < 1 < 85 \text{ হয়}$$

সমস্যা সমাধান

সমস্যা-8: $px^2 + qx + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m:n$ হলে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{p}{q}}$ এর মান কত?

সমাধান :ধরি, $px^2 + qx + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β ।

$$\therefore \alpha + \beta = -q/p$$

$$\therefore \alpha\beta = q/p$$

দেওয়া আছে, $\alpha/\beta = m/n$ তাহলে,

$$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$= \frac{-q}{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$= -\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$= 0(\text{Ans})$$

দলীয় কাজ



১। $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $(\alpha + \beta)^2$ ও $(\alpha - \beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপর মূলের বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(i) $b^3 = ac(3b - a - c)$ অথবা $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$

(ii) $c(a - b)^3 = a(c - b)^3$

৩। যদি $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি α মূল হয়, তবে প্রমাণ কর যে অপর মূলটি $4\alpha^3 - 3\alpha$ হবে।

একক কাজ



- k এর মান কত হলে, $(4 - k)x^2 + (2k + 4)x + (8k + 1) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান হবে?
- ২। যদি $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি 4 মূল হয়, তবে c এর মান এবং অপর মূলটি নির্ণয় কর।
- $bx^2 + cx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে দেখাওয়ে, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c}{b}} = 0$

মূল্যায়ন

- ১। $x^2 - 5x + 7 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha^3 + \beta^3$ এর মান নির্ণয় কর।
- ২। যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদুটিক্রমিকপূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p^2 - 4q - 1 = 0$
- ৩। যদি $27x^2 + 6x - (p + 2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর।

বাড়ির কাজ

১। $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। $x^2 + px + q =$

0 সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $(\alpha + \beta)^2$ ও $(\alpha - \beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর এবং $(\alpha + p)^{-4} + (\beta + p)^{-4}$ মান নির্ণয় কর।

৩। $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha - 1$ ও $\beta - 1$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। $x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ ও $\alpha - \beta$

এই পাঠ শেষে . . .

- ত্রিঘাত সমীকরণ কিভাবে চিনতে পারবে।।
- ত্রিঘাত সমীকরণ মূল বা বীজ নির্ণয় করতে পারবে।
- ত্রিঘাত সমীকরণ গঠন করা যানতে পারবে।
- সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

ত্রিঘাত সমীকরণ (Cubic equation)

ত্রিঘাত সমীকরণ : বহুপদী সমীকরণের ঘাত 3 হলে তাকে ত্রিঘাত সমীকরণ বলে ।

এক চলকবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণের আদর্শ রূপ- $ax^3+bx^2+cx+d=0$

যেখানে $a \neq 0$; a, b, c, d মূলদ সংখ্যা।

ত্রিঘাত সমীকরণের মূল-সহগ সম্পর্ক :

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে-

$$1. \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad 2. \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad 3. \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a},$$

ত্রিঘাত সমীকরণ গঠন :

$$x^3 - (\text{মূলগুলোর যোগফল})x^2 + (\text{দুইটি করে মূলগুলোর গুণফলের যোগফল})x - (\text{মূলগুলোর গুণফল}) = 0$$

সমস্যা সমাধান

উদাহরণ-১: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে-

a. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ **b.** $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\alpha + \beta + \gamma = -(-p/1) = p, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q/1 = q, \alpha\beta\gamma = -(-r/1) = r$$

$$\mathbf{a.} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = p^2 - 2q$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b.} \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \\ &(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \\ &= p(p^2 - 2q - q) + 3r = p^3 - 3pq + 3r \end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

উদাহরণ-2: $x^3 + ax^2 + bx + c =$

0 সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে-

$$i). \sum \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad ii). \sum \alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

$$iii). \sum \alpha^2 \beta = \alpha^2 \beta + \alpha^2 \gamma +$$

$\beta^2 \alpha + \beta^2 \gamma + \gamma^2 \alpha + \gamma^2 \beta$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : } \alpha + \beta + \gamma = -\frac{a}{1} = -a, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{b}{1} = b,$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{c}{1} = -c$$

$$i). \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (-a)^2 - 2b$$

$$= a^2 - 2b \quad (\text{ans.})$$

সমস্যা সমাধান

$$\begin{aligned}ii) \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \\ &= (-a)\{(a^2 - 2b) - b\} + 3(-c) \\ &= -a^3 + 2ab + ab - 3c \\ &= -a^3 + 3ab - 3c = 3ab - a^3 - 3c \text{ (ans.)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}iii) \sum \alpha^2\beta &= \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta \\ &= \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \gamma^2\alpha - \\ &\quad 3\alpha\beta\gamma \\ &= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma\alpha(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma \\ &= (-a)(b) - 3(-c) = -ab + 3c \text{ (ans.)}\end{aligned}$$

প্রয়োজনীয় সমস্যাবলী

সমস্যা-3 : $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\beta}$ ও $\frac{1}{2\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-1}{2} = b, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার মূলগুলো $\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\beta}$ ও $\frac{1}{2\gamma}$

$$\text{মূলগুলোর যোগফল} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{-1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{দুইটি করে মূলগুলোর গুণফলের যোগফল} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{4\alpha\beta} + \frac{1}{4\beta\gamma} + \frac{1}{4\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4\alpha\beta\gamma} = \frac{-\frac{3}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{মূলগুলোর গুণফল} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{1}{2\gamma} = \frac{1}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

ত্রিঘাত সমীকরণ গঠন :

$$x^3 - (\text{মূলগুলোর যোগফল})x^2 + (\text{দুইটি করে মূলগুলোর গুণফলের যোগফল})x - (\text{মূলগুলোর গুণফল}) = 0$$

$$x^3 - \left(\frac{-1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)x - \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ (Ans)}$$

সমাধান কর: $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$, যখন মূলগুলোসমান্তরশ্রেণীভুক্ত।

সমাধান : ধরি , প্রদত্তসমীকরণের মূলগুলো $\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta$

$$\text{মূলগুলোর যোগফল , } \alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta = -\frac{(-24)}{4}$$

$$\text{বা, } 3\alpha = 6$$

$$\text{বা, } \alpha = 2$$

দুইটি করে মূলগুলোরগুণফলেরযোগফল,

$$(\alpha-\beta)\alpha + \alpha(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \frac{23}{4}$$

$$\text{বা, } \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha^2 - \beta^2 = \frac{23}{4}$$

$$\text{বা, } 3\alpha^2 - \beta^2 = \frac{23}{4}$$

$$\text{বা, } 3(2)^2 - \beta^2 = \frac{23}{4}$$

$$\text{বা, } -\beta^2 = \frac{23}{4} - 12$$

$$\text{বা, } -\beta^2 = \frac{-25}{4}$$

$$\text{বা, } \beta^2 = \frac{25}{4}$$

$$\beta = \frac{5}{2}$$

প্রদত্তসমীকরণের মূলগুলো $\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta$

$$= 2 - \frac{5}{2}, 2, 2 + \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2} (\text{Ans})$$

বাড়ির কাজ

১। $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে

(a) $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ (b) $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}$ ও $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$

(c) $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}$ ও $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। সমাধান কর: $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$, যখন মূলগুলো সমান্তরশ্রেণীভুক্ত।

৩। সমাধান কর: $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$, যখন মূলগুলো গুণোত্তরশ্রেণীভুক্ত।

৪। সমাধান কর: $4x^3 + 20x^2 - 23x + 6 = 0$, যখন মূল দুইটি পরস্পরসমান ও ধনাত্মক।

৫। $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে- $\sum \alpha^2 \beta$ এর মান নির্ণয় কর।

পরবর্তী ক্লাস

জটিল সংখ্যা

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোডঃ ২৫৯১১

সময়: ৪৫মি:

পাঠ : বীজগণিত

অধ্যায়-৩

জটিল সংখ্যা

চিত্রগুলো লক্ষ করি



এই পাঠ শেষে

১. কাল্পনিক সংখ্যা জানতে পারবে ।
২. জটিল সংখ্যা জানতে পারবে ।
৩. জটিল সংখ্যার মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে পারবে ।
৪. এককের ঘনমূল নির্ণয় করতে পারবে ।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

১. কাল্পনিকসংখ্যা (Imaginary number):

যে সংখ্যার বর্গ ঋনাত্মকতাকে কাল্পনিকসংখ্যা বলে।

i একটি কাল্পনিকসংখ্যার বর্গ মান -1 অর্থাৎ $i^2 = -1$ । যদি $i^2 = -1$ বা $i = \pm\sqrt{-1}$ তবে $i = \sqrt{-1}$ ধরা হয়। তবে i কাল্পনিকসংখ্যার একক বলে।

i এর শক্তি (power of i):

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

২. **জটিলসংখ্যা**: একটি বাস্তব ও একটি কাল্পনিক এ দুইটি সংখ্যার যোগফল দ্বারা যে সংখ্যাটি প্রকাশ করা হয় তা জটিল সংখ্যা। a ও b দুটি বাস্তব সংখ্য হলে $z = a + ib$ আকারে গঠিত যে কোন সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়।

৩. **মডুলাস**: $z = a + ib$ হলে $\sqrt{a^2 + b^2}$ কে z এর মডুলাস বলা হয়।

$a + ib$ এর পরম মান $z = \sqrt{a^2 + b^2}$

৪. **আর্গুমেন্ট**: $\arg(z) = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ কে z এর আর্গুমেন্ট বলা হয়।

৫. এককের ঘনমূল: $1, \omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

৬. এককের ঘনমূলগুলোর যোগফল: $1 + \omega + \omega^2 = 0$

৭. এককের কাল্পনিক ঘনমূলগুলোর গুণফল: $\omega^3 = 1$

সমস্যা সমাধান

১. $7 - 24i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান: } \quad 7 - 24i &= 16 - 24i + 9i^2 \\ &= 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4i + (3i)^2 \\ &= (4 - 3i)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{7 - 24i} &= \pm \sqrt{(4 - 3i)^2} \\ &= \pm(4 - 3i)(Ans)\end{aligned}$$

২. $2i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান: } \quad 2i &= 1 + 2i + i^2 \\ &= (1 + i)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{2i} &= \pm \sqrt{(1 + i)^2} \\ &= \pm(1 + i)(Ans)\end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

৩। প্রমাণ করবে, $(a + b)^2 + (a\omega^2 + b\omega)^2 + (a\omega + b\omega^2)^2 = 6ab$

সমাধান : বামপক্ষ = $(a + b)^2 + (a\omega^2 + b\omega)^2 + (a\omega + b\omega^2)^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + a^2\omega^4 + 2a\omega^2 \cdot b\omega + b^2\omega^2 + a^2\omega^2 + 2a\omega \cdot b\omega^2 + b^2\omega^4$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + a^2\omega + 2ab\omega^3 + b^2\omega^2 + a^2\omega^2 + 2ab\omega^3 + b^2\omega$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + a^2\omega + 2ab + b^2\omega^2 + a^2\omega^2 + 2ab + b^2\omega$
 $= a^2(1 + \omega + \omega^2) + b^2(1 + \omega + \omega^2) + 6ab$
 $= 0 + 0 + 6ab$
 $= 6ab$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৪। যদি $x + iy = \sqrt[3]{(p + iq)}$ হয়, তবে প্রমাণ করবে, $4(x^2 - y^2) = \frac{p}{x} + \frac{q}{y}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x + iy = \sqrt[3]{(p + iq)}$

বা, $(x + iy)^3 = p + iq$, [ঘনকরে]

বা, $x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot (iy)^2 + (iy)^3 = p + iq$

বা, $x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot i^2 \cdot y^2 + i^3 y^3 = p + iq$

বা, $x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = p + iq$

বা, $(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = p + iq$

উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$p = x^3 - 3xy^2$ এবং $q = 3x^2y - y^3$

বা, $p = x(x^2 - 3y^2)$ বা, $q = y(3x^2 - y^2)$

বা, $\frac{p}{x} = x^2 - 3y^2 \dots (i)$ বা, $\frac{q}{y} = 3x^2 - y^2 \dots (ii)$

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2$

$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 4x^2 - 4y^2$ বা, $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 4(x^2 - y^2)$ (প্রমাণিত)

দলীয় কাজ



১. $1 + i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

২. i এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

৩. প্রমাণ কর যে, $(x + y)^2 + (x\omega^2 + y\omega)^2 + (x\omega + y\omega^2)^2 = 6xy$

৪. দেখাও যে,

(i) $a = 3 + 2i$ হলে $a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 8a + 39 = 0$

(ii) $a = -1 + i\sqrt{2}$ হলে $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 9 = 12$

একক কাজ



১। বর্গমূলনির্ণয়করঃ (i) i , (ii) $-i$, (iii) $1 + i$

২. ঘনমূলনির্ণয়করঃ (i) -1 , (ii) $-i$

৩। প্রমাণকরযে,

$$(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10}) = 9$$

৪। যদি $x + iy = \sqrt[3]{(p + iq)}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{p}{x} - \frac{q}{y} = -2(x^2 + y^2)$$

মূল্যায়ন

১। $-2i$ এর বর্গ মূল নির্ণয় কর।

২। $4 + 3i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

৩। যদি $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt[3]{a - ib} = x - iy$

৪। প্রমাণ কর যে, $(1 + \omega + \omega^2)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega) = -8$

বাড়ির কাজ

১। বর্গমূলনির্ণয়করঃ

$$(i) -7 + 24i, (ii) -8 - 6\sqrt{-1}, (iii) 4 + 3i$$

২। মাননির্ণয়করঃ

$$(i) \sqrt[4]{-81}, (ii) \sqrt[4]{-144}, (iii) \sqrt[4]{-625}, (iv) \sqrt[4]{-64}$$

৩। প্রমাণকরযে,

$$(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)(1 - \omega^8 + \omega^{16}) = 16$$

৪। $x = p + q, y = p\omega + q\omega^2$ এবং $z = p\omega^2 + q\omega$ হলে

$$\text{প্রমাণকর যে, } x^2 + y^2 + z^2 = 6pq$$

৫। $x = p + q, y = p + \omega q$ এবং $z = p + \omega^2 q$ হলে

$$\text{প্রমাণকর যে, } x^3 + y^3 + z^3 = 3(p^3 + q^3)$$

৬। $x = 1 + i\sqrt{2}$ হলে $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 3$ এর মাননির্ণয়কর।

পরবর্তী ক্লাস

বিন্যাস
(permutation)

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোডঃ ২৫৯১১

পাঠ : বীজগণিত

অধ্যায়-৪

বিন্যাস(permutation)

চিত্রগুলো লক্ষ করি



বিন্যাস (permutation)

এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.....

১. বিন্যাস এর সংজ্ঞা বলতে পারবে ।
২. ভিন্ন ভিন্ন জিনিষ নিয়ে কিভাবে সাজানো যায় বা কত প্রকারে সাজানো যায় বলতে পারবে ।
৩. বিন্যাস সংখ্যা ব্যবহার করে গনণার নতুন কৌশল জানতে পারবে ।

শিখন ফল

- বিন্যাস: কতগুলো নির্দিষ্ট জিনিসের একটিকে প্রত্যেকবার নিয়ে যত বিভিন্ন প্রকারে সাজানো যায়, তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলে। অন্যভাবে বলা যায় বিভিন্ন প্রকার কতগুলো জিনিস হতে কয়েকটি বা সব কয়টি জিনিস একমাত্র নিয়ে যত প্রকারে সাজানো তাকে বিন্যাস বলে।
- উদাহরন:ধরি,A,B,C তিনটি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর দেওয়া আছে।
- এ তিনটি অক্ষর হতে প্রত্যেক বার একটি করে নিয়ে তিন রকমে সাজানো যায়।যথা: A,B,C। সুতরাং বিন্যাসের সংখ্যা তিনটি। আবার এ তিনটি অক্ষর হতে প্রত্যেকবার দুটি করে নিয়ে মোট ছয় রকমে সাজানো যায়। যথা:AB,BA,BC,CB,AC,CA সুতরাং বিন্যাস সংখ্যা ছয়টি।
- প্রতীক চিহ্ন :
- n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস হতে প্রত্যেক বার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে যত প্রকারে সাজানো প্রাপ্ত বিন্যাসের সংখ্যাকে nPr প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

$${}^n P_r$$

১। বলতে কী বুঝে? ${}^n P_r$

উঃ n সংখক বিভিন্ন প্রকার জিনিস হতে r সংখক বিভিন্ন প্রকার জিনিস নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তার সংখ্যা হল $\frac{n!}{(n-r)!}$

$$0! = 1, \quad {}^n P_0 = 1, \quad {}^n P_1 = n, \quad {}^n P_2 = n(n-1), \quad {}^n P_n = n!$$

২। সব গুলো জিনিস ভিন্ননয় এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{n!}{p!q!r!}$

সমস্যা সমাধান

১। Dhaka শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?

সমাধান: Dhaka শব্দটিতে মোট 5টি অক্ষর আছে। যার মধ্যে ২টি a আছে। অন্য সব গুলো ভিন্ন।

Dhaka শব্দটির অক্ষরকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{5!}{2!} = 60$ (Ans)

২। Feni শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?

সমাধান: Feni শব্দটিতে মোট 4টি অক্ষর আছে। যার মধ্যে সব গুলো ভিন্ন।

Feni শব্দটির অক্ষরকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= 4! = 24$ (Ans)

সমস্যা সমাধান

৩। একটি বালকের 11 টি বিভিন্ন বস্তু আছে যার মধ্যে 5টি কালো এবং 6টি সাদা। একটি কালো বস্তু মাঝখানে রেখে সে তিনটি বস্তু এক সারিতে কত রকমে সাজাতে পারবে?

সমাধান: যেহেতু একটি কালো বস্তু সর্বদা মাঝখানের রাখতে হবে।

সুতরাং 5টির মধ্যে 1টিকে একটি স্থানের রাখা যাবে = 5P_1 ভাবে।

অবশিষ্ট 2টি স্থানের বাকি 10টি বস্তুতে রাখা যাবে = ${}^{10}P_2$ ভাবে।

$$\begin{aligned}\text{ডনর্গেয় সাজানো সংখ্যা} &= {}^5P_1 \times {}^{10}P_2 \\ &= 5 \times 90 \\ &= 450 \text{ (Ans)}\end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

৪। স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে polytechnic শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?

সমাধান: polytechnic শব্দটিতে মোট 11 টি অক্ষর আছে। যার মধ্যে ২ টি C। শব্দটিতে 3 টি স্বরবর্ণ আছে যার সব গুলো ভিন্ন।

11 টি অক্ষরকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = $\frac{11!}{2!} = 19958400$

স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি অক্ষর মনে করলে অক্ষর হয় 9 টি।

এ 9 টি অক্ষর এর বিন্যাস সংখ্যা = $\frac{9!}{2!} = 191440$

কিন্তু স্বরবর্ণ 3 টিকে তাদের নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় = $3! = 6$

স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে বিন্যাস সংখ্যা = 191440×6
= 1148640

সুতরাং স্বরবর্ণগুলো পাশাপাশি থাকে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা = $19958400 - 1148640$
= 18809760 (Ans)

দলীয় কাজ



- ১। nPr বলতে কী বুঝ?
- ২। Potaka শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?
- ৩। দেখাও যে, Barisal শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে নিয়ত প্রকারে সাজানো যায়, Rajshahi শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে নিয়ত প্রকারে সাজানো যায়।
- ৪। Electrical শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে এবং স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?

একক কাজ



১। নিম্ন লিখিত অপারেশন গুলোর মান নির্ণয় কর?

$$0!, {}^n P_0, {}^n P_1, {}^n P_2, {}^n P_n$$

২। SHANGSHAD শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে এবং স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?

৩। 0,1,2,3,4 অংকগুলো দ্বারা পাঁচ অংকের কতগুলো জোড় সংখ্যা গঠন করা যায়, তা নির্ণয় কর?

মূল্যায়ন



১। বিন্যাস কাকে বলে?

২. MIMI শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?

৩. 6,5,3,2,0 অংকগুলো দ্বারা পাঁচ অংকের কতগুলো স্বার্থক বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়, তা নির্ণয় কর?

বাড়ির কাজ

- ১। Parallel শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর ।
- ২। Mathematics শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর ।
স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে এবং স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?
- ৩। স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে Triangle শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?
- ৪। 2,2,2,3,3,4 অংকগুলো দ্বারা ছয় অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়, এদের কতগুলো 400000 অপেক্ষা বৃহত্তর হবে ।
- ৫। দেখাও যে, AMERICA শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায়, CALCUTTA শব্দটির অক্ষরগুলোকে একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায় ।

পরবর্তী ক্লাস

সমাবেশ (Combination)

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১
বিষয় কোডঃ ২৫৯১১
সময়: ৪৫মি:

পাঠ : বীজগণিত
অধ্যায়-৫
সমাবেশ (**Combination**)

নিচের চিত্রগুলো লক্ষ কর



সমাবেশ (Combination)

এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.....

১. সমাবেশ এর সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবে ।
২. বিভিন্ন জিনিসের সমাবেশ গঠন করতে পারবে ।
৩. দল গঠন করা জানতে পারবে ।
৪. প্রয়োজনীয় সমস্যা সমাধান করতে পারবে ।

শিখন ফল

সমাবেশ: কতগুলো নির্দিষ্ট জিনিস (বা বস্তু) হতে কয়েকটি বা সবকটি একবার নিয়ে যত প্রকারে বেছে নেয়া যায় বাদল গঠন করা যায়, এদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে ।

উদাহরণ: ধরি, A, B, C তিনটি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর দেওয়া আছে ।

১. প্রত্যেক বার একটি করে নিলে সমাবেশের সংখ্যা হবে তিনটি ; যথা: A, B, C ।

২. প্রত্যেক বার দুইটি করে বাছাই করলে সমাবেশের সংখ্যা হবে তিনটি ;

যথা: AB বা BA, BC বা CB, AC বা CA

৩. প্রত্যেক বার তিনটি করে নিলে সমাবেশের সংখ্যা হবে একটি; যথা: ABC ।

৪. n সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের সমাবেশ সংখ্যাকে $n C_r$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় ।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

$$(1) n_{C_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$(2) n_{C_n} = 1$$

$$(3) n_{C_0} = 1$$

$$(4) n_{C_1} = n,$$

$$(5) 0! = 1$$

$$(6) n_{C_r} = n_{C_{n-r}},$$

$$(7) n_{C_r} + n_{C_{r-1}} = n_{C_r} + 1_{C_r}$$

১ . প্রমাণ কর যে , $n_{Cr} = n_{Cn-r}$

সমাধান:

$$\text{আমরা জানি } n_{Cr} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \dots (i)$$

(i)নং এ $r = n - r$ বসিয়ে পাই

$$\begin{aligned} n_{Cn-r} &= \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \dots (ii) \end{aligned}$$

(i)নং ও (ii)নং হতে পাই

$$n_{Cr} = n_{Cn-r} \text{ (Proved)}$$

২. প্রমাণ করবে, ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

সমাধান:

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= {}^nC_r + {}^nC_{r-1} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{r(r-1)!(n-r+1)(n-r)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \\ &= n + 1 C_r \\ &= \text{ডানপক্ষ (Proved)} \end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

৩। মাননির্ণয়কর : i) ${}^{15}C_{12}$ ii) ${}^{100}C_{98}$

সমাধান:

$$i) {}^{15}C_{12} = \frac{15!}{12!(15-12)!} = \frac{15!}{12!3!} = 455 \text{ (Ans)}$$

$$ii) {}^{100}C_{98} = {}^{100}C_{100-98} = {}^{100}C_2 = \frac{100 \times 99}{1 \times 2} = 4950 \text{ (Ans)}$$

৪। ${}^nC_4 = {}^nC_6$ হলে nC_8 এর মান নির্ণয় কর:

সমাধান:

$${}^nC_4 = {}^nC_6$$

$$\text{বা, } {}^nC_{n-4} = {}^nC_6$$

$$\text{বা, } n - 4 = 6$$

$$\text{বা, } n = 10$$

$${}^nC_8 = {}^{10}C_8 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \text{ (Ans)}$$

সমস্যা সমাধান

৫। পরীক্ষার প্রশ্নে 2 টি বিভাগে 5 টি করে মোট 10 টি প্রশ্ন দেওয়া আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে দুটি বিভাগ হতে প্রশ্ন উত্তর দিতে হবে মোট 6 টি। সে কোন বিভাগ হতেই 4টির বেশি প্রশ্নের উত্তর দিতে পারবেনা। এক্ষেত্রে সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলোর উত্তর দিতে পারবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক্রমিক নং	১ম বিভাগ(5টি প্রশ্ন)	২য় বিভাগ(5টি প্রশ্ন)	উত্তর করার উপায়
(i)	4	2	${}^5C_4 \times {}^5C_2 = 50$
(ii)	3	3	${}^5C_3 \times {}^5C_3 = 100$
(iii)	2	4	${}^5C_2 \times {}^5C_4 = 50$
			মোট উপায় = 200

সমস্যা সমাধান

৬) ৯ জন লোকের একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করবে, এ যানবাহন দুটির একটিতে ৭ জনের বেশি অপরটিতে ৪ জনের বেশি ধরে না। দলটি কত রকমে ভ্রমণ করতে পারবে?

সমাধান:

ক্রমিক নং	১ম বাহন(৭ জন)	২য় বাহন(৪ জন)	ভ্রমণের উপায়
(i)	7	2	${}^9C_7 = {}^9C_2 = 36$
(ii)	6	3	${}^9C_6 = {}^9C_3 = 84$
(iii)	5	4	${}^9C_5 = {}^9C_4 = 126$
			মোট উপায় = 246

সমস্যা সমাধান

৭) . সাতটি সরলরেখার দৈর্ঘ্য 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সে.মি হলে দেখাও যে, এদের দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের সংখ্যা 32।

সমাধান:

আমরা জানি চতুর্ভুজ গঠনের জন্য 4 টি করে রেখা প্রয়োজন।

সুতরাং 7 টি সরলরেখা হতে 4টি করে রেখা বাছাই করার উপায়
 $= {}^7C_4 = 35$

কিন্তু আমরা জানি, কোন চতুর্ভুজের যেকোন তিনটি বাহুর সমষ্টির মান চতুর্থ বাহুর চেয়ে অবশ্যই বড় হবে।

তাই নিচের 3টি বাছাই এর জন্য কোন চতুর্ভুজ পাওয়া যাবে না –

1, 2, 3, 6 { 1 + 2 + 3 এর মান 6 এর চেয়ে বড় নয় }

1, 2, 3, 7 { 1 + 2 + 3 এর মান 7 এর চেয়ে বড় নয় }

1, 2, 4, 7 { 1 + 2 + 4 এর মান 7 এর চেয়ে বড় নয় }

সুতরাং, চতুর্ভুজ পাওয়া যাবে = $35 - 3 = 32$ টি। [দেখানো হলো]

সমস্যা সমাধান

৮)

৬

জন

ও

৪ জন খেলোয়াড়ের দুটি দল থেকে ১১ জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট টিম গঠন করতে হবে যাতে ৬ জনে র দল থেকে অন্তত ৪ জন খেলোয়াড়র ঐ টিমে থাকে। ক্রিকেট টিমটিক তপ্রকারে গঠন করা যাবে ?

সমাধান:

ক্রমিক নং	১ম দল (৬ জন)	২য় দল (৪ জন)	ক্রিকেট টিম গঠন করার উপায়
<i>i</i>	4	7	${}^6C_4 \times {}^8C_7 = 120$
<i>ii</i>	5	6	${}^6C_5 \times {}^8C_6 = 168$
<i>iii</i>	6	5	${}^6C_6 \times {}^8C_5 = 56$
			মোট উপায় = 344

৯) একটি ক্রিকেট

দলের 15 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বল করতে পারে এবং 3 জন উইকেট রক্ষা করতে পারে ।

কমপক্ষে

4

জন বোলার

~~৩ জন উইকেট রক্ষক নিয়ে~~ 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট দল কত প্রকারে গঠন করা যাবে?

ক্র. নং	বোলার (5 জন)	উইকেট রক্ষক (3 জন)	অন্যান্য (7 জন)	ক্রিকেটটি গঠন করার উপায়
i	4	2	5	${}^5C_4 \times {}^3C_2 \times {}^7C_5 = 315$
ii	5	2	4	${}^5C_5 \times {}^3C_2 \times {}^7C_4 = 105$
iii	4	3	4	${}^5C_4 \times {}^3C_3 \times {}^7C_4 = 175$
iv	5	3	3	${}^5C_5 \times {}^3C_3 \times {}^7C_3 = 35$
				মোট উপায় = 630

দলীয় কাজ



১। ${}^n C_r =$ কত?

২। 10 জনের মাঝে 4 জন মহিলা আছে। কত প্রকারে 5 জনের একটি কমিটি গঠন করা সম্ভব, যাতে কমপক্ষে 1 জন মহিলা কমিটিতে থাকে?

৩।

একটি ক্রিকেট দলের 15 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বল করতে পারে এবং 3 জন উইকেট রক্ষা করতে পারে।

কমপক্ষে 3 জন বোলার ও 2 জন উইকেট রক্ষক নিয়ে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট দল কত প্রকারে গঠন করা যাবে?

৪। 6 জন ছাত্র ও 5 জন ছাত্রী হতে 5 জনের একটি কমিটি কত উপায়ে গঠন করা যায়, যেন কমপক্ষে 1 জন ছাত্রী কমিটিতে থাকে?

একক কাজ

১. ${}^n C_0, {}^n C_1, {}^n C_2, {}^n C_3$ এর মানগুলো কত ?

২. ${}^n C_n =$ কত ?

৩. 7জন ছাত্র ও 4জন ছাত্রী হতে 5জনের একটি কমিটি কত উপায়ে গঠন করা যায় , যেন কমপক্ষে 1জন ছাত্রী কমিটিতে থাকে ?

৪। 6জন বিজ্ঞান বিভাগ ও 4জন কলা বিভাগের ছাত্র হতে 6জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে।

প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিজ্ঞানের ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠতাদিয়ে কত প্রকার কমিটি গঠন করা যাবে?

মূল্যায়ন

- ১) সমাবেশকাকৈবলে ?
- ২) ${}^{50}C_{50}$ এরমান কত?
- ৩) 4টিপ্রশ্নহতে2টিপ্রশ্নরউত্তর কত প্রকারেবাছাইকরাযায়? ।
- ৪) একটিঅষ্টভুজেরকৌণিকবিন্দুগুলোসংযোগকরেকয়টিকর্ণপাওয়াযাবে?
- ৫) একটিষড়ভুজেরকৌণিকবিন্দুগুলোসংযোগকরেকয়টিকর্ণপাওয়াযাবে?

বাড়ির কাজ

- ১) যদি ${}^n P_r = 240$ এবং ${}^n C_r = 120$ হয়, তবে n ও r মান নির্ণয় কর।
- ২) 7জন ছাত্র ও 4জন ছাত্রী হতে 5জনের একটি কমিটিকে তৈরি করার সময়, যাতে প্রত্যেক কমিটিতে কমপক্ষে 1জন ছাত্রী থাকবে?
- ৩) 11 জন লোকের একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করবে, এ যানবাহন দুটির একটিতে 7 জনের বেশি অপরটিতে 5 জনের বেশি ধরেনা। দলটিকে তরকমে ভ্রমণ করতে পারবে?
- ৪) একটি ক্রিকেট দলের 14জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 5জন বল করতে পারে এবং 2জন উইকেট রক্ষা করতে পারে। কমপক্ষে একজন উইকেট রক্ষক ও 3জন বোলার কেনিয়ে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট দল কত প্রকারে গঠন করা যাবে?
- ৫) 10 জন পুরুষ ও 6জন মহিলা হতে 7জনের একটি কমিটিকে তৈরি করার সময়, যাতে প্রত্যেক কমিটিতে কমপক্ষে 2জন মহিলা থাকবে?

পরবর্তী ক্লাস

সংযুক্ত কোণের ধারণা

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোডঃ ৬৫৯১১

সময়: ৪৫মি:

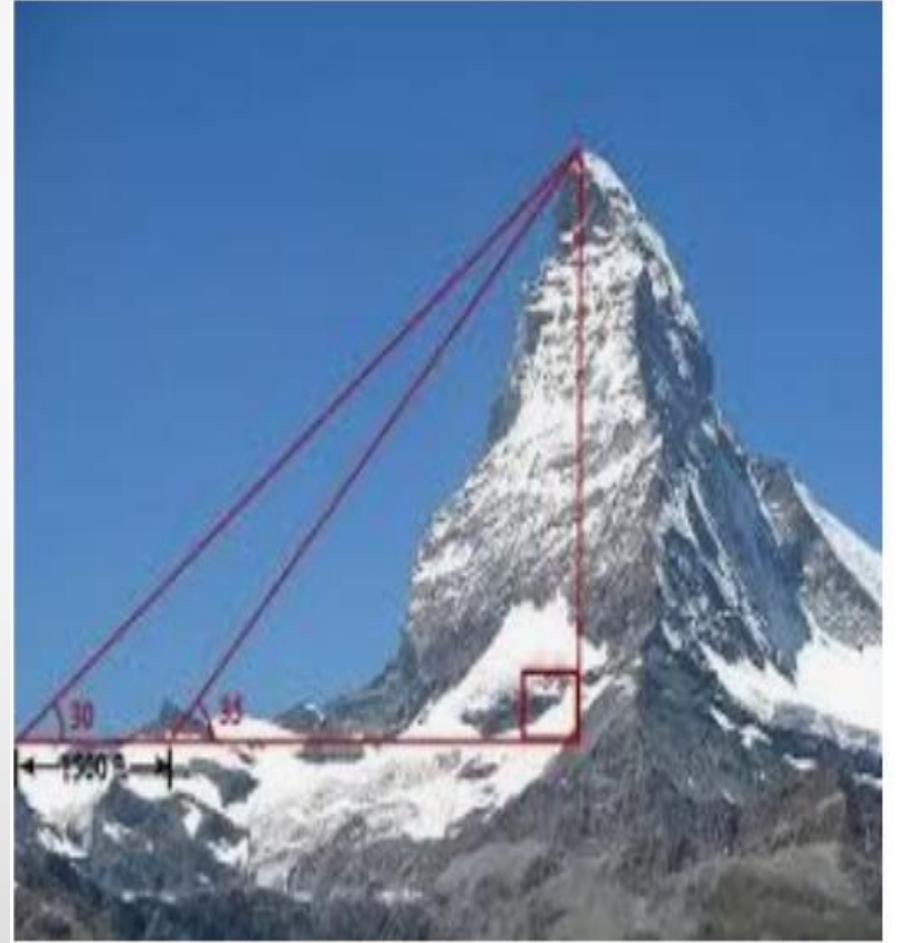
পাঠ : ত্রিকোণমিতি

অধ্যায়-৯

সংযুক্ত কোণের ধারণা

(Concept of Associated Angles)

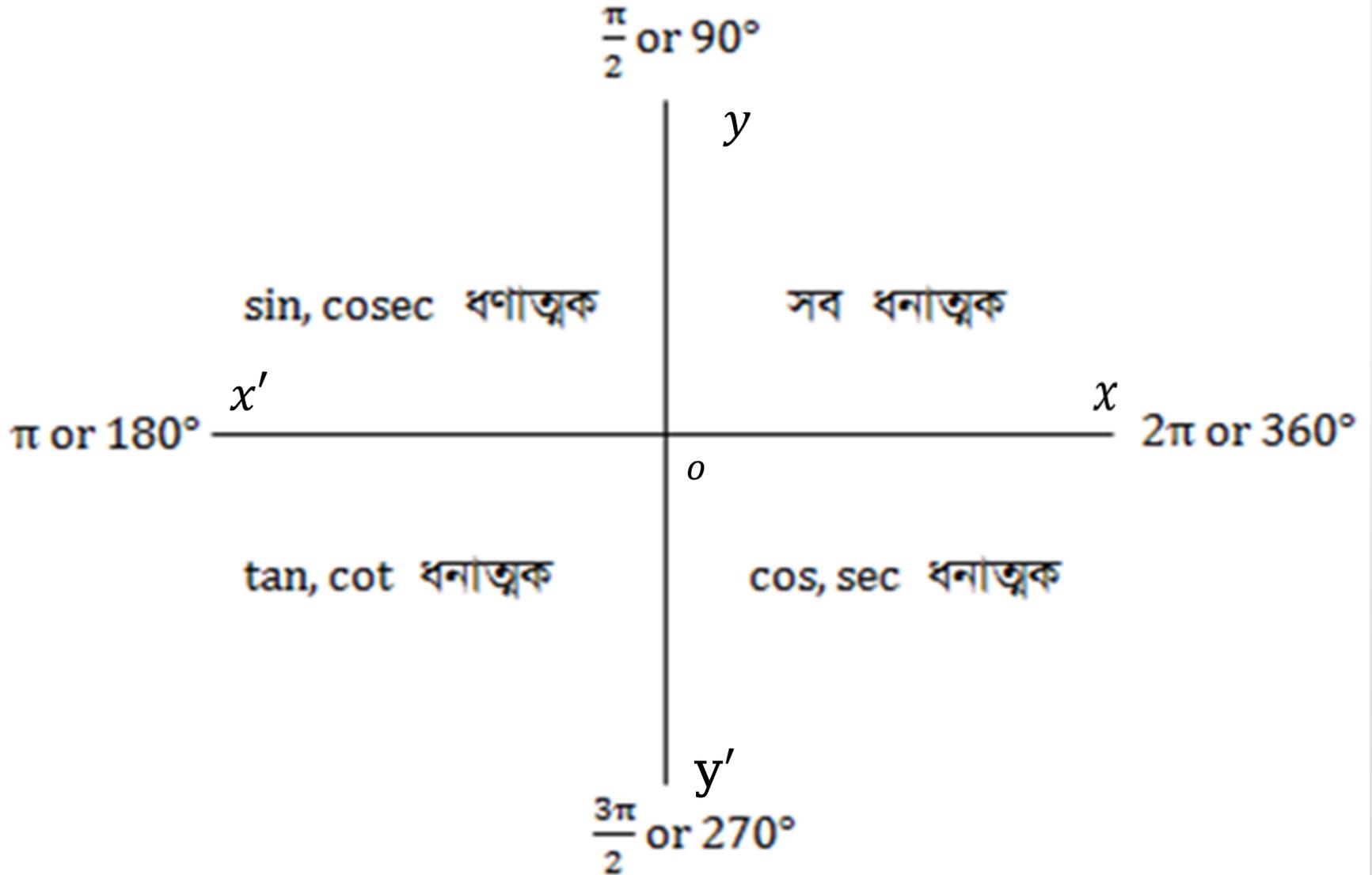
নিচের চিত্রগুলো লক্ষ কর



এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.....

১. সংযুক্ত কোণ এর সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবে ।
২. বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের চিহ্ন জানতে পারবে ।
৩. প্রয়োজনীয় সমস্যা সমাধান করতে পারবে ।

চতুর্ভাগ



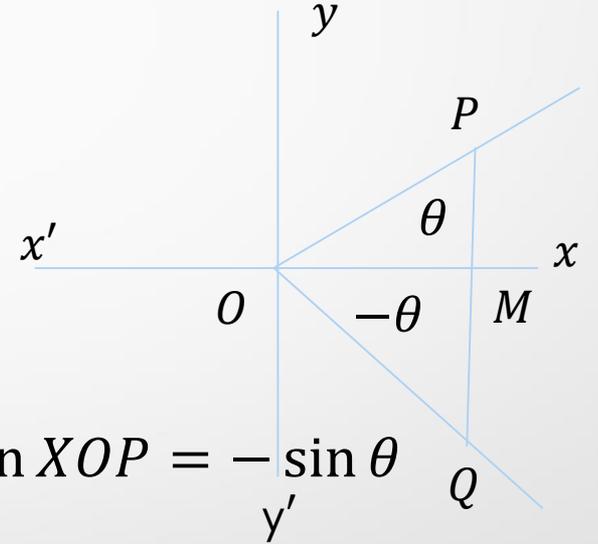
সংযুক্ত কোণের অনুপাত

সংযুক্ত কোণ: 90° বাএর কোন গুণিতকের সাথে যে কোন কোণ θ যদি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা ($n \cdot 90^\circ \pm \theta$) সংযুক্ত করায়, তবে প্রাপ্ত কোণটিকে θ কোণের সংযুক্ত কোণ বলা হয়। যেমন: ($90^\circ \pm \theta$), ($4 \times 90^\circ \pm \theta$) ইত্যাদি θ এর সংযুক্ত কোণ।

$(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক ফাংশন:

মনে করি, $\angle XOP = \theta$ এবং $\angle XOQ = -\theta$

আমরা পাই, $PM = -QM$ এবং $OP = OQ$



ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুসারে,

$$\sin(-\theta) = \sin XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{-PM}{OP} = -\sin XOP = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos XOP = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{-PM}{OM} = -\tan XOP = -\tan \theta$$

অনুরূপভাবে, $\cot(-\theta) = -\cot \theta$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$$

n জোড়হলে: অনুপাতঅপরিবর্তিতথাকে।

$$\begin{aligned}\sin(n.90^\circ \pm \theta) &= \sin \theta \cos(n.90^\circ \pm \theta) \\ &= \cos \theta \tan(n.90^\circ \pm \theta) \\ &= \tan \theta \cot(n.90^\circ \pm \theta) \\ &= \cot \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sec(n.90^\circ \pm \theta) &= \sec \theta \operatorname{cosec}(n.90^\circ \pm \theta) \\ &= \operatorname{cosec} \theta\end{aligned}$$

(i) $(n.90^\circ \pm \theta)$ এর অবস্থান ১ম চতুর্ভাগে: নতুন অনুপাত ধনাত্মক।

(ii) $((n.90^\circ \pm \theta))$ এর অবস্থান ২য়

চতুর্ভাগে: মূল অনুপাত \sin বা, cosec হলেনতুন অনুপাত ধনাত্মক, তানাহলেনতুন অনুপাত ঋণাত্মক।

(iii) $((n.90^\circ \pm \theta))$ এর অবস্থান ৩য়

চতুর্ভাগে: মূল অনুপাত \tan বা, \cot হলেনতুন অনুপাত ধনাত্মক, তানাহলেনতুন অনুপাত ঋণাত্মক।

(iv) $((n.90^\circ \pm \theta))$ এর অবস্থান ৪র্থ

চতুর্ভাগে: মূল অনুপাত \cos বা, \sec হলেনতুন অনুপাত ধনাত্মক, তানাহলেনতুন অনুপাত ঋণাত্মক।

n বিজোড়হলে: অনুপাতসহ-
অনুপাতে পরিবর্তিত হয়।

$$\begin{aligned}\sin(n.90^\circ \pm \theta) &= \cos \theta \\ \cos(n.90^\circ \pm \theta) &= \sin \tan(n.90^\circ \pm \theta) \\ &= \cot \theta \cot(n.90^\circ \pm \theta) \\ &= \tan \theta \sec(n.90^\circ \pm \theta) \\ &= \operatorname{cosec} \theta \operatorname{cosec}(n.90^\circ \pm \theta) = \sec \theta\end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

১. $\cos 690^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\cos 690^\circ = \cos(7 \times 90^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans)

২. $\sec(-960^\circ)$ এর মান নির্ণয় কর।

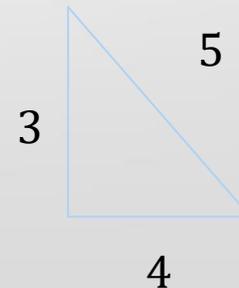
সমাধান: $\sec(-960^\circ) = \sec 960^\circ$
 $= \sec(10 \times 90^\circ + 60^\circ)$
 $= -\sec 60^\circ$

$= -2$ (Ans)

৩. $\tan \theta = \frac{3}{4}$ এবং $180^\circ < \theta < 270^\circ$ হলে $\sin \theta$ এর মান কত?

সমাধান: $\tan \theta = \frac{3}{4}$ এবং $180^\circ < \theta < 270^\circ$

$\sin \theta = -\frac{3}{5}$ (Ans)



সমস্যা সমাধান

8. সমস্যা: $4(\cos^2 \theta + \sin \theta) = 5$, (যখন $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)

সমাধান: $4(\cos^2 \theta + \sin \theta) = 5$

বা, $4(1 - \sin^2 \theta + \sin \theta) = 5$

বা, $4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 = 0$

বা, $(2 \sin \theta - 1)^2 = 0$

বা, $2 \sin \theta - 1 = 0$

বা, $\sin \theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

বা, $\theta = 30^\circ$

আবার, $\sin \theta = \sin 30^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 150^\circ$

বা, $\theta = 150^\circ$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

সমস্যা সমাধান

৫। $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{25\pi}{14} + \sin \frac{28\pi}{7} + \sin \frac{29\pi}{14}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান: } \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{25\pi}{14} + \sin \frac{28\pi}{7} + \sin \frac{29\pi}{14}$$

$$= \sin \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} \right) + \sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7} \right)$$

$$= \sin \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7}$$

$$= 2\sin \frac{2\pi}{7} + 2\cos \frac{2\pi}{7}$$

$$= 2 \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right)$$

$$= 2.1 = 2 \text{ (Ans)}$$

সমস্যা সমাধান

৬। যদি $\sin \theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে প্রমাণ করবে, $\frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}$

সমাধান: $\sin \theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

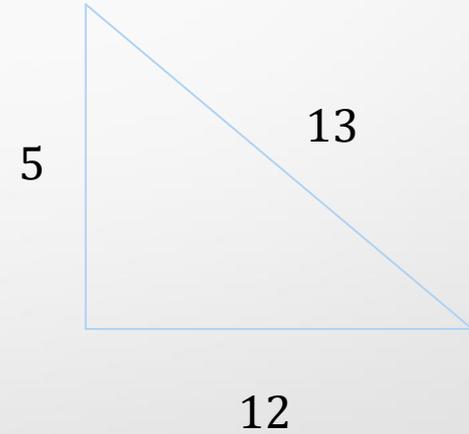
$$\tan \theta = -\frac{5}{12}, \sec \theta = -\frac{13}{12}, \cot \theta = -\frac{12}{5}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{5}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \operatorname{cosec}(-\theta)}$$

$$= \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta}$$

$$= \frac{\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}} = \left(-\frac{18}{12}\right) \left(-\frac{5}{25}\right)$$

$$= \frac{3}{10} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$



দলীয় কাজ



১। $\cos(1410^\circ)$ ও $\tan(-1125^\circ)$ এর মান কত?

২। সমাধান কর: $\cot^2 \theta - 2\sqrt{2} \operatorname{cosec} \theta + 3 = 0$ (যখন $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)

৩। $\sin \frac{217\pi}{18} + \sin \frac{25\pi}{8} + \cos \frac{237\pi}{18} + \cos \frac{23\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। $\sec \frac{214\pi}{17} - \sec \frac{239\pi}{17} + \cot \frac{241\pi}{34} - \cot \frac{223\pi}{34}$ এর মান নির্ণয় কর।

একক কাজ



১। $\sin\theta = \frac{3}{5}$ এবং $90^\circ < \theta < 180^\circ$ হলে $\tan\theta$ এর মান কত?

২। সমাধান কর: $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{3}$ (যখন $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)

৩। $\cos\frac{2\pi}{24} + \cos\frac{2 \cdot 19\pi}{24} + \cos\frac{2 \cdot 31\pi}{24} + \cos\frac{2 \cdot 37\pi}{24}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হয়, তবে $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান কত?

মূল্যায়ন

১। $\sec(-1500^\circ)$ এর মান নির্ণয় কর।

২। $\cos 558^\circ + \sin 792^\circ + \tan 168^\circ + \tan 12^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। $\cos \frac{2\pi}{8} + \cos \frac{23\pi}{8} + \cos \frac{25\pi}{8} + \cos \frac{27\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় কর।

বাড়ীর কাজ

১। (i) $\tan 3840^\circ$ ও (ii) $\tan 2295^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

২। যদি $\sin \theta = \frac{3}{5}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\operatorname{cosec}(-\theta) + \cot \theta}{\sec(-\theta) + \tan \theta} = \frac{3}{2}$

৩। $\cos 198^\circ + \sin 432^\circ + \tan 168^\circ + \tan 12^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। সমাধান কর: (যখন $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)

$$(i) \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2$$

$$(ii) 2 \sin^2 \theta + \cos \theta = 0$$

$$(iii) 2 \sin^2 \theta + 5 \cos \theta - 4 = 0$$

$$(iv) \tan^2 \theta + \cot^2 \theta = 2$$

$$(v) 3 \tan^2 \theta + 1 = \frac{2\sqrt{3}}{\cot \theta}$$

$$(vi) \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$$

পরবর্তী ক্লাস

যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোডঃ ২৫৯১১

সময়: ৪৫মি:

পাঠ : ত্রিকোণমিতি

যৌগিক কোণ



এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.....

১. যৌগিক কোণ এর সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবে ।
২. প্রয়োজনীয় সমস্যা সমাধান করতে পারবে ।

যৌগিক কোণের অনুপাত

যৌগিক কোণ : দুইবাততোধিক কোণের যোগফলবাবিয়োগফলকে যৌগিক কোণ বলে । যেমন : $A + B$, $A - B$, $A + B + C$ ইত্যাদি ।

প্রয়োজনীয় সূত্র

$$1. \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$2. \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$3. \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$4. \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

প্রয়োজনীয় সূত্র

$$5. \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$6. \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$7. \cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$8. \cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B}$$

$$9. \sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \cos^2 A$$

$$10. \cos(A + B) \cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \sin^2 A$$

সমস্যা সমাধান

১. (i) $\sin 15^\circ$ (ii) $\cos 15^\circ$ (iii) $\sin 75^\circ$ এর মাননির্ণয়কর।

সমাধান:

$$(i) \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} (\text{Ans})$$

$$(ii) \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} (\text{Ans})$$

$$(iii) \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} (\text{Ans})$$

সমস্যা সমাধান

২). যদি $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$ হয় ,
তবে দেখাও যে, $1 + \cot \alpha \tan \beta = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$

$$\text{বা, } \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\text{বা, } \cos(\alpha + \beta) = \cos 0$$

$$\text{বা, } \alpha + \beta = 0$$

$$\text{বা, } \beta = -\alpha$$

$$\text{বামপক্ষ} = 1 + \cot \alpha \tan \beta$$

$$= 1 + \cot \alpha \tan(-\alpha)$$

$$= 1 - \cot \alpha \tan \alpha$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

$$= \text{ডানপক্ষ (দেখানো হল) ।}$$

সমস্যা সমাধান

৩) যদি $\tan \alpha + \tan \beta = b$, $\cot \alpha + \cot \beta = a$, $\alpha + \beta = \theta$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(a - b) \tan \theta = ab$

সমাধান :

$$\tan \alpha + \tan \beta = b$$

$$\text{বা, } \cot \alpha + \cot \beta = a$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = a$$

$$\text{বা, } \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{\tan \alpha \tan \beta} = a$$

$$\text{বা, } \frac{b}{\tan \alpha \tan \beta} = a$$

$$\text{বা, } \tan \alpha \tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{এখন, } \alpha + \beta = \theta$$

$$\text{বা, } \tan(\alpha + \beta) = \tan \theta$$

$$\text{বা, } \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan \theta$$

$$\text{বা, } \frac{b}{1 - \frac{b}{a}} = \tan \theta$$

$$\text{বা, } \frac{b}{\frac{a-b}{a}} = \tan \theta$$

$$\text{বা, } \frac{ab}{a-b} = \tan \theta$$

$$\text{বা, } (a - b) \tan \theta = ab$$

(প্রমাণিত)

দলীয় কাজ

১) (i) $\tan 105^\circ$ ও (ii) $\sin 165^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

২) যদি $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$

৩) যদি $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 1$ হয়, তবে দেখাও যে,
 $1 + \cot \alpha \cot \beta = 0$

৪) যদি $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - 1 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, (a) $1 - \tan \alpha \tan \beta = 0$

(b) $1 - \cot \alpha \cot \beta = 0$

৫) $a \cos(x + \alpha) = b \cos(x - \alpha)$ হলে দেখাও
যে, $(a + b) \tan x = (a - b) \cot x$

একক কাজ

১. যদি $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 1$ হয়.

তবে দেখাও যে, $1 + \tan \alpha \tan \beta = 0$

২. যদি $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ হয়. তবে দেখাও যে, $(\cot \alpha - 1)(\cot \beta - 1) = 2$

৩. $m \sin(\alpha - \beta) = n \sin(\alpha + \beta)$ হলে দেখাও যে,

$$(m - n) \tan \alpha = (m + n) \tan \beta$$

৪. যদি $\tan \alpha + \tan \beta = y$, $\cot \alpha + \cot \beta = x$, $\alpha + \beta = \theta$ হয়.

তবে দেখাও যে, $\tan \theta = \frac{xy}{x-y}$

মূল্যায়ন

১) $\sin(A + B) =$ কত?

২) $\cos(A + B) =$ কত?

৩) $\cos(A - B) =$ কত?

৪) $\tan(A + B) =$ কত?

৫) $\tan(A - B) =$ কত?

৬) $\cot(A + B) =$ কত?

৭) $\cos 75^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

৮) $\cos \alpha + \cos \beta = a$ এবং $\sin \alpha + \sin \beta = b$ হলে দেখাও

যে, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2)$

বাড়ির কাজ

১) $\sin 15^\circ$ ও (ii) $\tan 75^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

২) প্রমাণ করবে,

$$(i) \cos 81^\circ 26' \cos 21^\circ 26' + \cos 8^\circ 34' \cos 68^\circ 34' = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \cos 68^\circ 20' \cos 8^\circ 20' + \cos 81^\circ 40' \cos 21^\circ 40' = \frac{1}{2}$$

৩) প্রমাণ করবে, $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$

৪) যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হয়,

তবে প্রমাণ করবে, (i) $\tan A = \tan B + \tan C$

$$(ii) \tan B + \tan C = 2$$

৫) যদি $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$ হয়. তবে দেখাও যে, $1 + \cot \alpha \tan \beta = 0$ অথবা $1 + \tan \alpha \cot \beta = 0$

৬) যদি $\alpha + \beta = \theta$ এবং $\tan \alpha = k \sin \beta$ হয়, তবে প্রমাণ করবে, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{k-1}{k+1} \tan \theta$

পরবর্তী ক্লাস

রূপান্তর সূত্র

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোডঃ ৬৫৯১১

সময়: ৪৫মি:

পাঠ : ত্রিকোণমিতি

অধ্যায়-১১

রূপান্তর সূত্র

Motivation



এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.....

১. রূপান্তর সূত্রগুলো জানতে পারবে ।
২. প্রয়োজনীয় সমস্যা সমাধান করতে পারবে ।

প্রয়োজনীয় সূত্র

➤ দুটি সাইন বা কোসাইন অনুপাতের যোগ বা বিয়োগফলকে সাইন বা কোসাইনের গুণফলে রূপান্তর :

$$(1) \sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

$$(2) \sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$$

$$(3) \cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

$$(4) \cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B$$

প্রয়োজনীয় সূত্র

$$(5) \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$(6) \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$(7) \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$(8) \cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$$

সমস্যা সমাধান

১) প্রমাণ কর যে , $\sin 55^\circ + \cos 55^\circ = \sqrt{2}\cos 10^\circ$

সমাধান:

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sin 55^\circ + \cos 55^\circ \\ &= \sin 55^\circ + \cos(90^\circ - 35^\circ) \\ &= \sin 55^\circ + \sin 35^\circ \\ &= 2\sin \frac{55^\circ+35^\circ}{2} \cos \frac{55^\circ-35^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 45^\circ \cos 10^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 10^\circ \\ &= \sqrt{2} \cos 10^\circ = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

২) $\cos 50^\circ + \cos 40^\circ$ এর মান কত?

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } & \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \\ &= 2 \cos \frac{50^\circ + 40^\circ}{2} \cos \frac{50^\circ - 40^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 45^\circ \cos 5^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5^\circ \\ &= \sqrt{2} \cos 5^\circ \text{ (Ans)} \end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

৩) প্রমাণ কর যে, $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } & \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 20^\circ (2 \sin 80^\circ \sin 40^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 20^\circ \{ \cos(80^\circ - 40^\circ) - \cos(80^\circ + 40^\circ) \} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 20^\circ (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 20^\circ (\cos 40^\circ + 1/2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 20^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 2 \cos 40^\circ \sin 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 20^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} (\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 20^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16} \quad (\text{প্রমাণিত}) \end{aligned}$$

8) প্রমাণ কর যে , $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$

সমাধান : $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 20^\circ (2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \cos 20^\circ \{ \cos(80^\circ + 40^\circ) + \cos(80^\circ - 40^\circ) \}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \cos 20^\circ (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \cos 20^\circ \left(-\frac{1}{2} + \cos 40^\circ\right)$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \cos 20^\circ + \frac{1}{4} \cos 40^\circ \cos 20^\circ$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{8} \cdot 2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{8} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{8} \cos 60^\circ + \frac{1}{8} \cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{8} \cos 60^\circ = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \text{ (প্রমাণিত)}$$

সমস্যা সমাধান

৫) যদি $\sin x = m \sin y$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{m-1}{m+1} \tan \frac{x+y}{2}$$

সমাধান : $\sin x = m \sin y$

$$\text{বা, } \frac{\sin x}{\sin y} = m$$

$$\text{বা, } \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\text{বা, } \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\text{বা, } \tan \frac{x+y}{2} \tan \frac{x-y}{2} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\text{বা, } \tan \frac{x-y}{2} = \frac{m-1}{m+1} \tan \frac{x+y}{2} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

দলীয় কাজ



১. $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

২. $\cos 15^\circ - \cos 75^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

৩. যদি $\cos x = k \cos y$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan \frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \cot \frac{y-x}{2}$

৪. প্রমাণ কর যে, $\cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ) = \frac{4 \cos 2A}{2 \sin 2A + 1}$

একক কাজ



১. $\cos C - \cos D =$ কত?

২. $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ =$ কত?

৩. যদি $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হয়, তবে দেখাও যে, $A + B = \frac{\pi}{2}$

৪. যদি $\sin \theta = k \sin(\alpha - \theta)$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\tan\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{\alpha}{2}$$

মূল্যায়ন

১) $\cos 75^\circ + \sin 75^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

২) প্রমাণ কর যে, $\tan 70^\circ = \tan 20^\circ + 2 \tan 50^\circ$

৩) প্রমাণ কর যে $\tan \frac{45^\circ + \theta}{2} \tan \frac{45^\circ - \theta}{2} = \frac{\sqrt{2} \cos \theta - 1}{\sqrt{2} \cos \theta + 1}$

৪) যদি $\sin x = k \sin y$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{x+y}{2}$$

বাড়ির কাজ

১। $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

২। প্রমাণ কর যে, $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

৩। প্রমাণ কর যে, $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

৪। যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\sin(A + \frac{C}{2}) = k \sin \frac{C}{2}$ হয়,

তবে প্রমাণ কর যে, $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{k-1}{k+1}$

৫। প্রমাণ কর যে, $16 \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{8\pi}{15} \cos \frac{14\pi}{15} = 1$

৬। যদি $\sin \theta + \cos \phi = \sqrt{3}(\cos \phi - \cos \theta)$ হয়,

তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \phi) = \frac{3}{4}$

পরবর্তী ক্লাস

গুণিতক কোণ

পাঠ পরিচিতি

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোডঃ ২৫৯১১

সময়: ৪৫মি:

পাঠ : ত্রিকোণমিতি

অধ্যায়- ১২ (গুণিতক কোণ ।)

Motivation



এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.....

১. গুণিতক কোণ এর সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবে ।
২. প্রয়োজনীয় সমস্যা সমাধান করতে পারবে ।

গুণিতক কোণ

গুণিতক কোণ: কোনএকটি কোণকে যে-কোনপূর্ণসংখ্যা দ্বারা গুণ করলেপ্রাপ্ত কোণকে গুণিতক কোণ বলে । যেমন : $2A, 3A, 4A$ ইত্যাদি ।

$$1. \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$2. \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ = 2\cos^2 A - 1 \\ = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$3. \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$4. \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$5. \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$6. \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

সমস্যা সমাধান

১) $\tan A = 1/2$ হলে দেখাওযে

$$10\sin 2A - 6 \tan 2A + 5 \cos 2A = 3$$

সমাধান: বামপক্ষ = $10\sin 2A - 6 \tan 2A + 5 \cos 2A$

$$= 10 \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} - 6 \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + 5 \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$= 10 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + (\frac{1}{2})^2} - 6 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} + 5 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 + (\frac{1}{2})^2}$$

$$= 10 \cdot \frac{4}{5} - 6 \cdot \frac{4}{3} + 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= 8 - 8 + 3$$

$$= 3 = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

সমস্যা সমাধান

২) প্রমাণ কর যে , $\tan 2A = (\sec 2A + 1) \sqrt{\sec^2 A - 1}$

সমাধান: ডানপক্ষ $= (\sec 2A + 1) \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$$= \left(\frac{1}{\cos 2A} + 1 \right) \sqrt{\tan^2 A}$$

$$= \left(\frac{1 + \cos 2A}{\cos 2A} \right) \tan A$$

$$= \frac{2\cos^2 A}{\cos 2A} \cdot \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{2\sin A \cos A}{\cos 2A}$$

$$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A}$$

$$= \tan 2A$$

$$= \tan 2A = \text{বামপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

সমস্যা সমাধান

৩) যদি $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$ হয়, তবে প্রমাণ করবে, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$

সমাধান: $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$

বা, $\tan \alpha = \frac{3 \tan \beta}{2}$

বামপক্ষ = $\tan(\alpha - \beta)$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{3 \tan \beta}{2} - \tan \beta}{1 + \frac{3 \tan \beta}{2} \tan \beta}$$

$$= \frac{\tan \beta}{2 + 3 \tan^2 \beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{2 + \frac{3 \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}}$$

$$= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \times \frac{\cos^2 \beta}{(2 \cos^2 \beta + 3 \sin^2 \beta)}$$

$$= \frac{\sin \beta \cos \beta}{2 \cos^2 \beta + 3 \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{2 \cdot 2 \cos^2 \beta + 3 \cdot 2 \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{2(1 + \cos 2\beta) + 3(1 - \cos 2\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

8) যদি $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ হয়,

তবে প্রমাণ করবে, $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 12 \cos A \cos B \cos C$

সমাধান: $\cos A + \cos B + \cos C = 0$

বা, $\cos A + \cos B = -\cos C$

বা, $(\cos A + \cos B + \cos C)^3 = (-\cos C)^3$

বা, $\cos^3 A + \cos^3 B + 3 \cos A \cos B (\cos A + \cos B) = -\cos^3 C$

বা, $\cos^3 A + \cos^3 B + 3 \cos A \cos B (-\cos C) = -\cos^3 C$

বা, $\cos^3 A + \cos^3 B - 3 \cos A \cos B \cos C = -\cos^3 C$

বা, $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C = 3 \cos A \cos B \cos C$

বামপক্ষ = $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C$

= $4 \cos^3 A - 3 \cos A + 4 \cos^3 B - 3 \cos B + 4 \cos^3 C - 3 \cos C$

= $4(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) - 3(\cos A + \cos B + \cos C)$

= $4 \times 3 \cos A \cos B \cos C - 3 \times 0$

= $12 \cos A \cos B \cos C - 0$

= $12 \cos A \cos B \cos C$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

দলীয় কাজ



১. $\tan A = 1/2$ হলে i) $\sin 2A$ ii) $\cos 2A$ এর মান কত?
২. $\tan A = \sqrt{3}$ হলে $\tan 2A$ এর মান কত?
৩. প্রমাণ করবে, $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$
৪. প্রমাণ করবে, $\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$
৫. প্রমাণ করবে, $\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$
৬. যদি $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ এবং $\tan \beta = \frac{1}{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$

একক কাজ

1. $\sin 2A$ কে $\tan A$ এ প্রকাশ কর ।

2. $\cos 2A$ কে $\tan A$ এ প্রকাশ কর ।

3. $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ হলে $\cos 2\alpha$ এর মান কত?

4. যদি $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ এবং $\tan \beta = \frac{1}{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin 2\alpha = \cos 2\beta$

5. প্রমাণ কর যে, $\sin^2 (A - 120^\circ) + \sin^2 A + \sin^2 (A + 120^\circ) = \frac{3}{2}$

মূল্যায়ন

১) গুণিতককোণকাকেবলে?

২) $\tan 2A$, $\sin 3A$ ও $\cos 3A$ সূত্রটি গুলোলিখ।

৩) $\cot A = 2$ হলে $\cot 2A$ এরমান কত?

৪) $\sin A = 1$ হলে $\sin 2A$ এরমান কত?

৫) যদি $\tan \theta = \sec 2\alpha$ হয়, তবে দেখাওযে, $\sin 2\theta = \frac{1 - \tan^4 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha}$

বাড়ীর কাজ

১। প্রমাণ করবে, $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$

২। প্রমাণ করবে, $\cos^2 (A - 120^\circ) + \cos^2 A + \cos^2 (A + 120^\circ) = \frac{3}{2}$

৩। $\tan \alpha = 2 \tan \beta$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3 \sin 2\beta}{1 + 3 \cos 2\beta}$

৪। যদি α এবং β কোণদ্বয় ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ হয় এবং $\cos 2\alpha = \frac{3 \cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$

হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan \alpha = \sqrt{2} \tan \beta$

৫। যদি $\tan^2 \theta = 1 + 2 \tan^2 \phi$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos 2\phi = 1 + 2 \cos 2\theta$

৬) যদি $\sin A + \sin B + \sin C = 0$ হয়,

তবে প্রমাণ করবে, $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -12 \sin A \sin B \sin C$

পরবর্তী ক্লাস

উপগুণিতক কোণ

পাঠ পরিচিতি

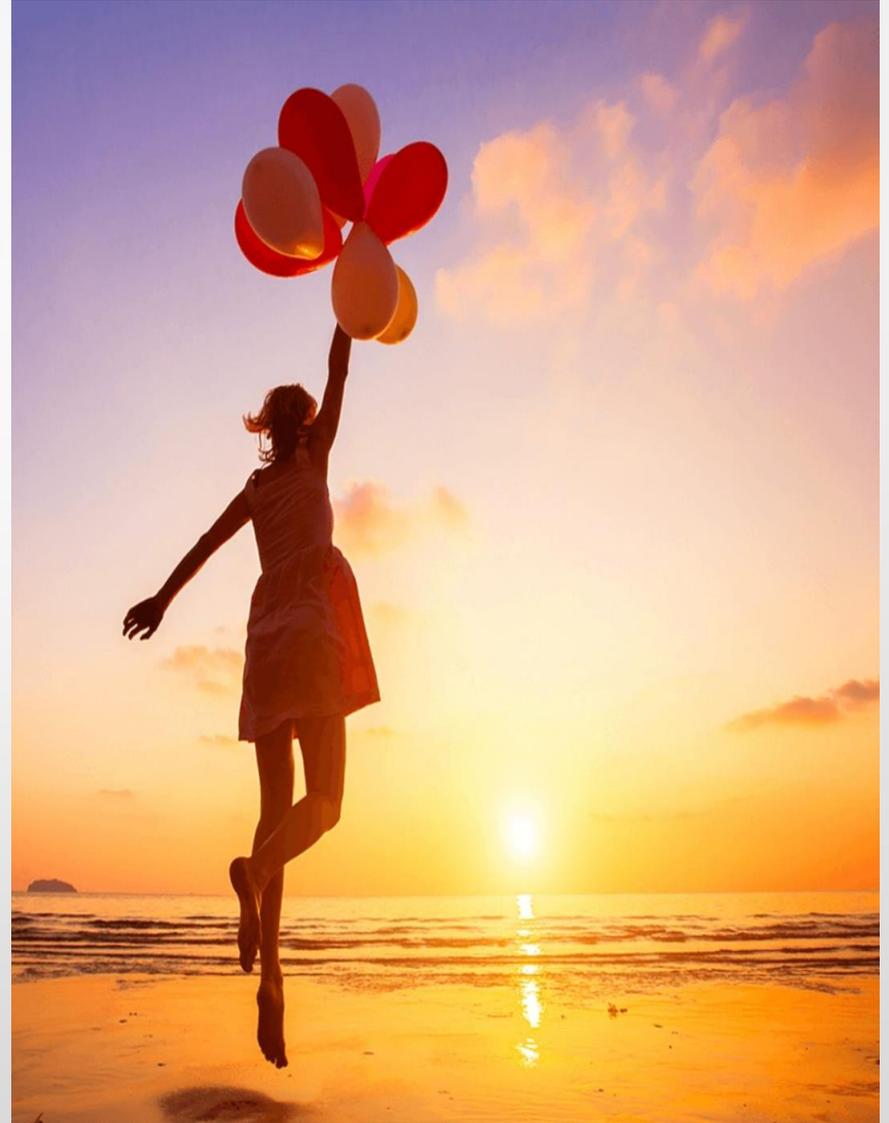
বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোডঃ ২৫৯১১

সময়: ৪৫মি:

পাঠ : ত্রিকোণমিতি
অধ্যায়-১৩, উপগুণিতক কোণ ।

Motivation



এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.....

১. উপগুণিতক কোণ এর সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবে ।
৩. প্রয়োজনীয় সমস্যা সমাধান করতে পারবে ।

উপগুণিতক কোণ

উপগুণিতক কোণ: কোনএকটি কোণকে যে-কোনপূর্ণসংখ্যাদ্বারাভাগকরলেপ্রাপ্ত কোণকেউপগুণিতক কোণবলে । যেমন : $\frac{A}{2}$, $\frac{A}{3}$, $\frac{A}{4}$ ইত্যাদি ।

$$1. \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$2. \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$3. \tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$4. \sin \theta = 3 \sin \frac{\theta}{2} - 4 \sin^3 \frac{\theta}{2}$$

$$5. \cos \theta = 4 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{\theta}{2}$$

সমস্যা সমাধান

সমস্যা-১: $\sin 18^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\theta = 18^\circ$

$$\text{বা, } 5\theta = 90^\circ$$

$$\text{বা, } 2\theta + 3\theta = 90^\circ$$

$$\text{বা, } 2\theta = 90^\circ - 3\theta$$

$$\text{বা, } \sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$$

$$\text{বা, } \sin 2\theta = \cos 3\theta$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta = 4 \cos^2 \theta - 3$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta = 4(1 - \sin^2 \theta) - 3$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

কিন্তু $\sin \theta$ বা $\sin 18^\circ$ ধনাত্মক।

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

সমস্যা-২: প্রমাণ করবে, $2 \sin 11^\circ 15' = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
সমাধান:

$$\text{বামপক্ষ} = 2 \sin 11^\circ 15'$$

$$= \sqrt{4 \sin^2 11^\circ 15'}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 11^\circ 15'}$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos 2 \cdot 11^\circ 15')}$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cos 22^\circ 30'}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 22^\circ 30'}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2(1 + \cos 2 \cdot 22^\circ 30')}}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos 45^\circ}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cdot 1/\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

সমস্যা-৩: প্রমাণ করবে, $2 \cos \frac{\pi}{16} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

সমাধান:

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= 2 \cos \frac{\pi}{16} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{16}} \\ &= \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\pi}{16}} \\ &= \sqrt{2(1 + \cos 2 \cdot \frac{\pi}{16})} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{2\pi}{8}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2 - \sqrt{2(1 + \cos 2 \cdot \frac{\pi}{8})}} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cdot 1/\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &= \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

সমস্যা সমাধান

সমস্যা-8: $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\phi}{2}$ হলে প্রমাণ করবে, $\cos \phi = \frac{\cos \theta - e}{1 - e \cos \theta}$

সমাধান: $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\phi}{2}$

বা, $\cot \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cot \frac{\theta}{2}$

বা, $\cos \frac{\phi}{2} / \sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} (\cos \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta}{2})$

বা, $\cos^2 \frac{\phi}{2} / \sin^2 \frac{\phi}{2} = (1-e) \cos^2 \frac{\theta}{2} / (1+e) \sin^2 \frac{\theta}{2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{(1-e) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (1+e) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{(1-e) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (1+e) \sin^2 \frac{\theta}{2}}$

বা, $\frac{\cos \phi}{1} = \frac{(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) - e(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})}{(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}) - e(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})}$

বা, $\cos \phi = \frac{\cos \theta - e}{1 - e \cos \theta}$

দলীয় কাজ



১। প্রমাণকরযে, $\sec \theta + \tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

২। প্রমাণকরযে, $2 \cos 7\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

৩। প্রমাণকরযে, $\tan 7\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

৪। প্রমাণকরযে, $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \frac{1}{16}$

৫। প্রমাণকরযে, $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

একক কাজ



১। $\cos 18^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

২। $\tan A/2 = \sqrt{3}$ হলে $\cos A$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। প্রমাণ কর যে, $\tan 82\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$

৪। প্রমাণ কর যে, $\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$

৫। প্রমাণ কর যে, $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

মূল্যায়ন

১। $\sin A, \cos A$ ও $\tan A$ কে $\tan \frac{A}{2}$ এ প্রকাশ কর।

২। $\cot \frac{A}{2}$ হলে $\cot A$ এর মান কত?

৩। প্রমাণ কর যে, $\frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} = \cot \frac{\theta}{2}$

৪। প্রমাণ কর যে, $\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - 60^\circ \right) + \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ \right) = \frac{3}{2}$

৫। প্রমাণ কর যে, $\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} - 60^\circ \right) + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ \right) = \frac{3}{2}$

বাড়ীর কাজ

১। $\tan A/2 = 1/2$ হলে, i) $\sin A$, ii) $\cos A$ এর মান কত?

২। প্রমাণ করবে,

$$(i) 2 \cos 11^\circ 15' = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$(ii) 2 \sin 7\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$(iii) 2 \sin \frac{\pi}{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$(iv) 2 \sin \frac{\pi}{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

৩। প্রমাণ করবে, $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$

৪। $\cos \alpha + \cos \beta = a$ এবং $\sin \alpha + \sin \beta = b$ হলে দেখাও যে,

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

A heart-shaped white tag with the words "Thank you!" written in a black, cursive font. The tag is placed on a light-colored wooden surface. To the left and right of the tag are two vibrant red roses with green leaves. In the foreground, a string of white pearls is draped across the wood, with several pearls scattered around the base of the tag and roses. The background is a soft, out-of-focus greyish-brown.

*Thank
you!*